4.3.3 Podobnost trojúhelníků I

Předpoklady: 040302

Př. 1: Trojúhelník *ABC* je podobný trojúhelníku *KLM* s koeficientem podobnosti $k = 2,5$. Urči délky stran trojúhelníku *ABC*, jestliže pro trojúhelník *KLM* platí: $k = 6\text{ cm}$, $l = 14\text{ cm}$, $m = 16\text{ cm}$.

Podobný s koeficientem 2,5:

- $a = 2,5 \cdot k = 2,5 \cdot 6 = 15\text{ cm}$,
- $b = 2,5 \cdot l = 2,5 \cdot 14 = 35\text{ cm}$,
- $c = 2,5 \cdot m = 2,5 \cdot 16 = 40\text{ cm}$.

Trojúhelník *ABC* má délky stran $a = 15\text{ cm}$, $b = 35\text{ cm}$, $c = 40\text{ cm}$.

Př. 2: Dopočti zbývající strany, jestliže platí $ABC \sim EFG$, $|AB| = 14\text{ cm}$, $|BC| = 6\text{ cm}$, $|FG| = 9\text{ cm}$, $|EG| = 18\text{ cm}$.

Ze známých stran si odpovídají strany *BC* a *FG* $\Rightarrow$ určíme koeficient podobnosti:

$$k = \frac{|FG|}{|BC|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Dopočteme zbývající strany:

- $|EF| = k|AB| = \frac{3}{2} \cdot 14\text{ cm} = 21\text{ cm}$
- $|EG| = k|AC| \Rightarrow |AC| = \frac{|EG|}{k} = \frac{18}{\frac{3}{2}}\text{ cm} = 12\text{ cm}$

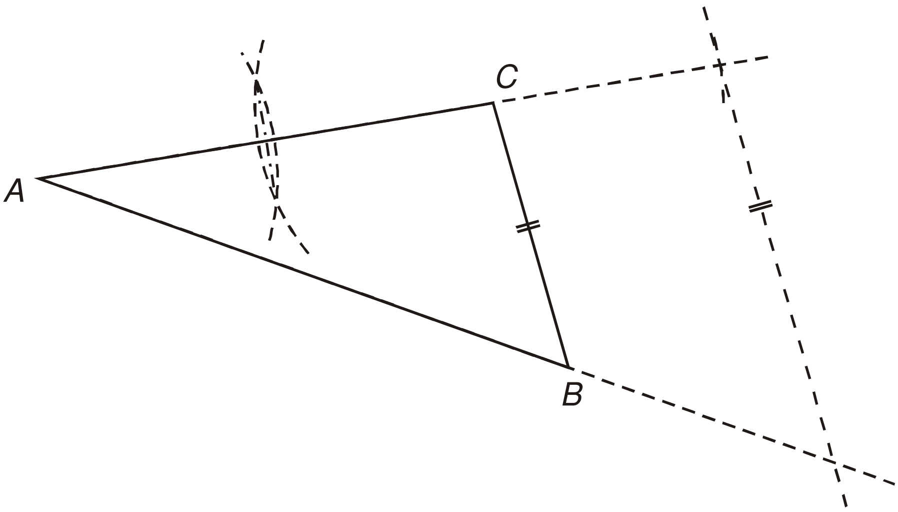
Platí:

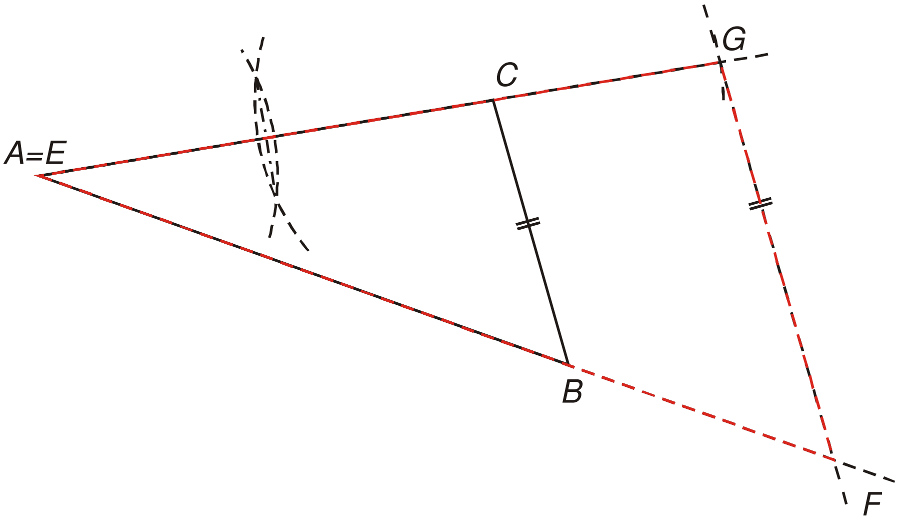
- Trojúhelník *ABC*: $|AB| = 14\text{ cm}$, $|BC| = 6\text{ cm}$, $|CA| = 12\text{ cm}$.
- Trojúhelník *EFG*: $|EF| = 21\text{ cm}$ $|FG| = 9\text{ cm}$, $|EG| = 18\text{ cm}$.

Pedagogická poznámka: Žáci řeší příklad různě (někteří dokonce využívají poměry v rámci trojúhelníků), vše z čeho je vidět schopnost orientace, je v pořádku.

Př. 3: Narýsuj libovolný trojúhelník *ABC*. Dorýsuj do obrázku co nejúspornějším způsobem trojúhelník *EFG*, který je s trojúhelníkem *ABC* podobný s koeficientem $k = \frac{3}{2}$.

Prodloužíme dvě libovolné strany trojúhelníku, jednu z nich zvětšíme v poměru 3:2 a uděláme rovnoběžku s třetí stranou.





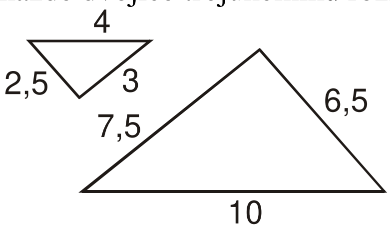
Pedagogická poznámka: Objevuje se ledacos, ale řešení z učebnice jen velmi vzácně. Když ho ukáži na tabuli, všem se líbí a oceňují, že je opravdu nejjednodušší.

Př. 4: V minulých ročnících jsme používali věty o shodnosti trojúhelníků, pomocí kterých jsme dokazovali shodnosti trojúhelníků. Ke většině vět o shodnosti existuje věta o podobnosti, která umožňuje dokazovat u trojúhelníků podobnost. Sepiš věty o shodnosti trojúhelníků a k nim odpovídající věty o podobnosti trojúhelníků.

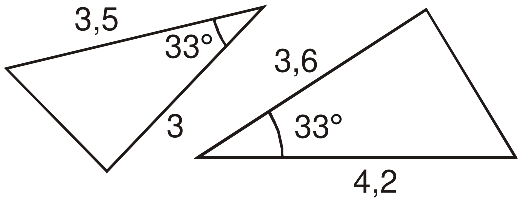
Věta o shodnosti		Věta o podobnosti	
sss	Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve všech třech stranách.	*sss*	Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují poměry velikostí všech tří navzájem si odpovídajících stran.
sus	Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve dvou stranách a úhlu, který strany svírají.	*sus*	Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují v poměrech dvou odpovídajících si stran a úhlu, který strany svírají.
usu	Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují v jedné straně a přilehlých úhlech.	*uu*	Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují ve dvou úhlech (shoda ve třetím je zřejmá, kvůli

			součtu 180°).
Ssu	Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich.		Není věta o podobnosti.

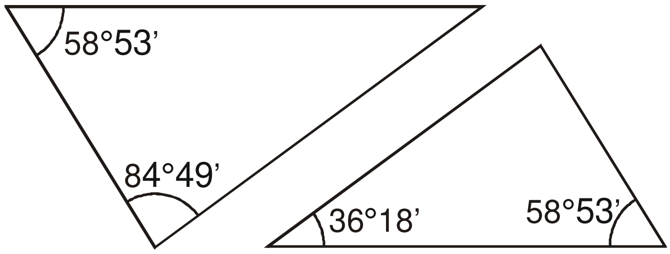
Př. 5: U každé dvojice trojúhelníků rozhodni pomocí odpovídající věty o jejich podobnosti.



a)

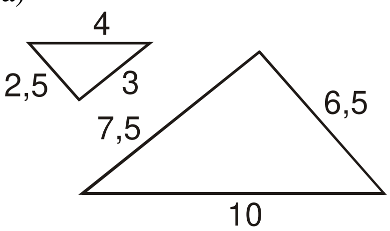


b)



c)

a)

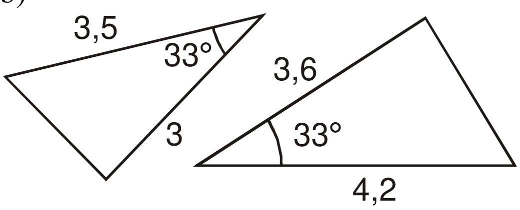


Známe všechny strany $\Rightarrow$ kontrolujeme poměry odpovídajících si stran, zda platí věta *sss* o podobnosti:

- $\frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$,
- $\frac{7,5}{3} = \frac{75}{30} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$,
- $\frac{6,5}{2,5} = \frac{65}{25} = \frac{13}{5} = 2,6$

$\Rightarrow$ trojúhelníky nejsou podobné.

b)



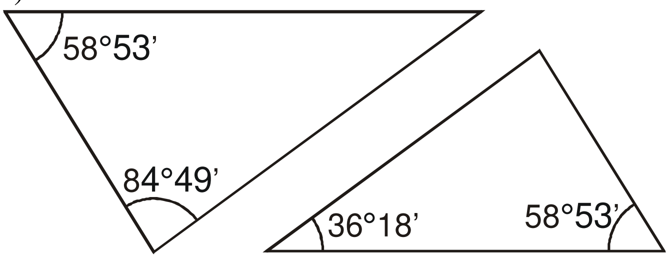
Zakreslené úhly jsou shodné $\Rightarrow$ kontrolujeme poměry stran:

- $\frac{4,2}{3,5} = \frac{42}{35} = \frac{6}{5} = 1,2$,

- $\frac{3,6}{3}=\frac{36}{30}=\frac{6}{5}=1,2$

$\Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné podle věty *sus*.

c)



U jednoho z trojúhelníků musíme dopočítat třetí úhel (zda se shoduje se zbývajícím úhlem v druhém trojúhelníku).

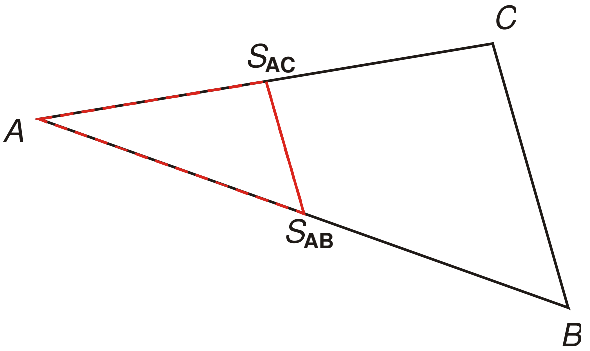
$180°-(36°18'+58°53')=180°-94°71'=179°60'-95°11'=84°49'$

Trojúhelníky se shodují ve dvou úhlech $\Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné.

Pedagogická poznámka: V bodě c) mají někteří problémy s minutami. Připomínám maximálně, že stupeň má 60 minut.

Př. 6: Užitím podobnosti dokaž vlastnosti střední příčky v trojúhelníku.

Střední příčka je rovnoběžná se stranou, na které neleží její krajní bod, a má poloviční délku než tato strana.



Narýsováním příčky $S_{AC}S_{AB}$ získáme trojúhelník $AS_{AC}S_{AB}$, který je podobný s trojúhelníkem ABC s koeficientem podobnosti 0,5 podle věty *sus*:

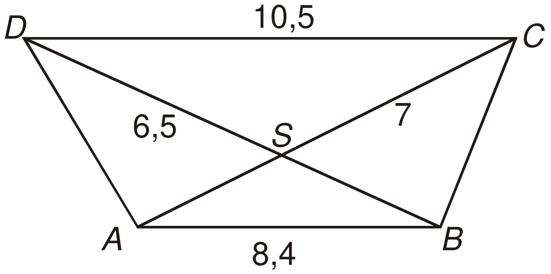
- $|AS_{AC}|=0,5|AC|$,
- úhel α je pro oba trojúhelníky společný,
- $|AS_{AB}|=0,5|AB|$.

Z podobnosti obou trojúhelníků vyplývá:

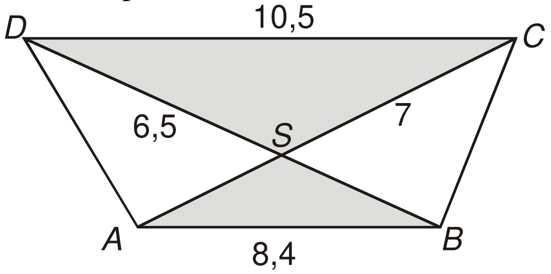
- $|S_{AB}S_{AC}|=0,5|BC|$ (zbývající strany podobných trojúhelníků),
- $S_{AB}S_{AC} \parallel BC$ (platí, $|\sphericalangle AS_{AC}A_{AB}|=\gamma$).

Př. 7: Bod S je průsečíkem úhlopříček v lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD. Urči délky úhlopříček AC a BD, jestliže v lichoběžníku znáš následující délky: $|AB| = 8,4\text{ cm}$, $|CD| = 10,5\text{ cm}$, $|CS| = 7\text{ cm}$ a $|DS| = 6,5\text{ cm}$.

Nakreslíme obrázek.



V obrázku jsou dva podobné trojúhelníky, z jejich podobnosti můžeme dopočítat zbývající části úhlopříček.



Určíme koeficient podobnosti: $k = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{8,4}{10,5} = 0,8$.

Dopočteme strany trojúhelníku ABS:

- $|BS| = k|DS| = 0,8 \cdot 6,5\text{ cm} = 5,2\text{ cm}$,
- $|AS| = k|CS| = 0,8 \cdot 7\text{ cm} = 5,6\text{ cm}$.

Určíme délky úhlopříček:

- $|AC| = |AS| + |SC| = 5,6 + 7\text{ cm} = 13,6\text{ cm}$,
- $|BD| = |BS| + |SD| = 5,2 + 6,5\text{ cm} = 11,7\text{ cm}$.

Shrnutí: Podobnost trojúhelníků určujeme podle vět analogických větám o shodnosti trojúhelníků.